

УДК 539.3

## О ЗАПАЗДЫВАНИИ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

**В.Г. Зубчанинов, Е.Г. Алексеева**

За пределом упругости при сложном непропорциональном нагружении материалы обладают как скалярными, так и векторными свойствами. В линейных шестимерном пространстве  $\mathring{A}_6$  и пятимерном  $\mathring{A}_5$  векторных пространствах тензорам напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , а также их девиаторам  $S_{ij}$  и  $\dot{Y}_{ij}$  ставятся в соответствие векторы напряжений  $\bar{\sigma}$  и деформаций  $\bar{Y}$ , которые описывают в этих пространствах траектории, соответствующие реализуемым процессам нагружения и деформирования. В пространстве  $\mathring{A}_5$  строится образ физического процесса деформирования, для которого А.А. Ильюшин сформулировал свой частный постулат изотропии в виде закона, содержащего функционалы процесса, зависящие от модуля вектора деформации, температуры, параметров кривизны и кручения траектории как функций длины ее дуги либо времени, принимаемых за параметры прослеживания процессов. Для всех случаев простого нагружения постулат изотропии дает векторный закон

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\dot{Y}} \bar{Y}, \quad \left( S_{ij} = \frac{\sigma}{\dot{Y}} \dot{Y}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \right), \quad (1)$$

где  $\sigma$  и  $\dot{Y}$  – модули векторов напряжений и деформаций соответственно в пятимерном подпространстве формоизменения  $E_5$ . Согласно этому закону скалярные свойства полностью определяются из простейших опытов на растяжение и кручение, которые позволяют найти закон упругопластического упрочнения

$$\sigma = \hat{\sigma}(\dot{Y}). \quad (2)$$

Опыты показывают, что точность теории простого нагружения допускает отклонение вектора  $\bar{\sigma}$  от пропорциональной зависимости  $\bar{\sigma} - \bar{Y}$  порядка 6–7 %. Формулы (1), (2) устанавливают общий физический закон при пропорциональном (простом) нагружении для первоначально изотропных материалов при сложном напряженно-деформированном состоянии.

Явление запаздывания векторных свойств материалов при сложном нагружении было обнаружено впервые в 1932 г. в экспериментальных исследованиях В. Прагера и К. Хоэнмзера [1], подвергавших стальные трубчатые образцы одновременному растяжению и кручению по двузвенным ломаным траекториям. По существу в этих опытах был поставлен вопрос о влиянии предшествующих деформаций до излома их траектории на соотношения связи между напряжениями и деформациями при сложном нагружении в теории течений Прандтля – Рейсса для идеальных упругопластических материалов. В указанной работе В. Прагер предложил записывать закон связи между тензорами напряжений и деформаций в виде линейного тензорного соотношения для начально-изотропных сред, а сами тензоры представить в виде векторов линейного координатно-тензорного девятимерного пространства.

Однако авторы [1] не обратили внимания на то, что запаздывание вектора напряжений от направления процесса деформирования после излома траектории является *общим свойством векторных свойств* для пластических материалов. При этом они не исследовали отдельно скалярные свойства материала и не обнаружили «нырков» напряжений и возникающего запаздывания скалярных свойств того же материала. Все это было сделано А.А. Ильюшиным [2–7], отметившим, что свойство запаздывания векторных свойств материалов – *это совершенно общее свойство материалов при сложном нагружении*, которое характеризуется *следом запаздывания* [2], и ориентация

(направление) конечных приращений векторов относительно траектории деформации в точке  $K$  зависит не от всей траектории, а только от участка в пределах следа запаздывания  $\lambda$ , причем след  $\lambda$ , различный для разных материалов, имеет порядок трех – десяти «упругих» деформаций  $\varepsilon_0$ . Это и есть закон запаздывания. Практически оказывается, что уже при  $|\mathfrak{a}|\lambda < 1$ , где  $|\mathfrak{a}|$  – любая из кривизн, участок  $\lambda$  может считаться траекторией малой кривизны, для которой справедливы соотношения [3]

$$\bar{\sigma} = \sigma \frac{d\tilde{Y}}{ds}, \quad \sigma = \hat{O}(s), \quad \hat{\sigma} = \hat{p}_1. \quad (3)$$

Опытами В.С. Ленского доказано, что для траектории всюду малой кривизны выполняется соотношение  $\bar{\sigma} = \sigma \hat{p}_1$ , где  $\sigma = \hat{O}(s)$  – универсальная функция длины дуги  $s$ .

Согласно (3) направление нормали к поверхности текучести  $F(\tilde{Y})$  в точке нагружения  $K$  совпадает с направлением вектора напряжений, где  $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$ ,  $\hat{p}_1 = d\tilde{Y}/ds$ . При простом нагружении  $d\tilde{Y}/ds \approx \tilde{Y}/\dot{Y}$  [5].

В работе [4] отмечается: «Свойство запаздывания состоит в том, что отклонение вектора напряжений  $\bar{\sigma}$  от касательной к траектории деформации  $d\tilde{Y}/dt$  зависит не от всей траектории деформации, а лишь от ее последнего участка, равного длине следа запаздывания  $\lambda$ ; если радиус  $R$  кривизны траектории на участке следа был больше длины следа запаздывания ( $R > \lambda$ ), то вектор напряжений практически совпадал с касательной к траектории деформации. Для процессов, изображаемых траекториями малой кривизны ( $R \geq \lambda$ ), с удовлетворительной точностью установлено, что модуль вектора напряжений  $\bar{\sigma}$  (совпадающего с касательной к траектории деформации) зависит только от длины дуги траектории  $s$ , то есть является такой же функцией  $s$ , как и при простом нагружении при данной температуре», но только от величины  $\dot{Y}$ . «Найдено, что теория простого нагружения, вытекающая из постулата изотропии, подтверждается также в процессах, близких к простому нагружению».

В теории течения вектор полных деформаций, в том числе формоизменения, разлагается на вектор упругих деформаций  $\tilde{Y}^e$  и вектор пластических деформаций  $\tilde{Y}^p$ . Их приращения связаны соотношениями

$$d\tilde{Y}^e = \frac{d\bar{\sigma}}{2G}, \quad d\tilde{Y}^p = d\lambda \operatorname{grad} f(\bar{\sigma}), \quad (4)$$

где  $G$  – упругий модуль сдвига,  $d\lambda$  – скалярный параметр,  $f(\bar{\sigma})$  – функция, описывающая поверхность текучести. В теории Прандтля – Рейсса – Хилла для материалов с упрочнением принимается

$$2f = \bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma} - C_p^2(s^p) = 0, \quad (5)$$

где  $s^p > 0$  – длина дуги траектории пластических деформаций в девиаторном пространстве  $E_5$ ,  $ds^p = |d\tilde{Y}^p|$ . Согласно (4), (5) приращение

$$d\tilde{Y}^p = d\lambda \bar{\sigma}, \quad d\lambda = \frac{ds^p}{\sigma}. \quad (6)$$

Как следует из (6), векторы  $d\tilde{Y}^p$  и  $\bar{\sigma}$  компланарны. Следовательно, в девиаторном пространстве пластических деформаций  $\bar{\sigma}$  направлен по касательной к траектории пластических деформаций. Такой образ процесса в [8–10] назван скользящим, и для него соответствующий угол сближения  $\vartheta_1$  отсутствует.

Принцип градиентальности (4) и (6) накладывает в теории пластического течения весьма жесткое ограничение на векторные свойства материалов. Полная деформация в отмеченной выше теории течения

$$d\vec{Y} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + \frac{\bar{\sigma}d\vec{Y}^p}{\sigma^2} \bar{\sigma} \quad (7)$$

или с учетом (6):

$$d\vec{Y} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} + ds^p \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \quad (8)$$

где скалярные свойства материала отражены универсальным законом упрочнения Одквиста

$$\sigma = H(s^p), \quad (9)$$

определяемым из опыта на простое нагружение при растяжении.

Первой теорией пластичности, учитывающей в ясном виде векторные свойства материалов и принцип запаздывания, была теория процессов А.А. Ильюшина [5–6] для двухзвенных ломаных траекторий, в дальнейшем обобщенная на плоские траектории произвольной кривизны  $\alpha_1$  в форме теории компланарности трех векторов  $\bar{\sigma}$ ,  $d\bar{\sigma}$ ,  $d\vec{Y}$  [7]. Основное соотношение этой теории было представлено в виде

$$d\bar{\sigma} = N d\vec{Y} + P - N \frac{\bar{\sigma} d\vec{Y}}{\sigma^2} \bar{\sigma}, \quad (10)$$

$$P = \frac{d\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}}{d\vec{Y} \cdot \bar{\sigma}} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{\cos \vartheta_1}, \quad N = \frac{d\bar{\sigma} \cdot \hat{n}}{d\vec{Y} \cdot \hat{n}}, \quad \cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 = \frac{\bar{\sigma} d\vec{Y}}{\sigma ds}, \quad \hat{n} \perp \hat{p}_1, \quad (11)$$

где  $s$  – длины дуги траектории деформаций в девиаторном пространстве  $E_5$  полных деформаций;  $\vartheta_1$  – угол сближения между  $\bar{\sigma}$  и направлением единичного вектора, касательного к траектории  $\hat{p}_1 = d\vec{Y}/ds$ ;  $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}/\sigma$  – единичный вектор напряжений.

Соотношения (10) представимы в более удобном виде с выделением в явном виде угла сближения  $\vartheta_1$  и дифференциального уравнения для его определения [9, 10]:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = N \frac{d\vec{Y}}{ds} + \left( \frac{d\sigma}{ds} - N \cos \vartheta_1 \right) \hat{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \alpha_1 = -\frac{N}{\sigma} \sin \vartheta_1. \end{cases} \quad (12)$$

В теории течения (4)–(9) параметр  $d\lambda$  можно определить из (6) через полные деформации

$$d\lambda = \frac{\bar{\sigma} d\vec{Y}^p}{\sigma^2} = 2G - P \frac{\bar{\sigma} d\vec{Y}}{\sigma^2} = \left( 2G \cos \vartheta_1 - \frac{d\sigma}{ds} \right) \frac{1}{\sigma}.$$

Тогда вместо (12) получим:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\sigma}}{ds} = 2G \frac{d\vec{Y}}{ds} + \left( \frac{d\sigma}{ds} - 2G \cos \vartheta_1 \right) \hat{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \alpha_1 = -\frac{2G}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\sigma = \hat{O}(s) \quad (14)$$

является универсальной функцией А.А. Ильюшина, мало отличающейся от функции простого нагружения (2) Роша и Эйхингера  $\sigma = \hat{O}(\dot{Y})$  [8].

Сравнивая соотношения (12), (13), видим, что теория течения следует из гипотезы компланарности, если принять  $N = 2G$ . В частности, в теории процессов для траекторий малого кручения ( $R \sim \lambda$ )  $N = \alpha(2G)$ , где  $\alpha = 0,7 \div 0,8$ .

При постоянном  $\mathfrak{a}_1$  из (13) получим приближенное решение для угла сближения:

$$\vartheta_1 = \vartheta_1^* + \vartheta_1^0 - \vartheta_1^* e^{-k\Delta s}, \quad \vartheta_1^* = -\frac{\mathfrak{a}_1}{k}, \quad (15)$$

где  $\vartheta_1^0$  – угол излома траектории деформирования в начальной точке  $K$  при  $s = s_0$  участка траектории постоянной кривизны;  $k = \alpha \cdot 2G / \sigma^\delta$ ,  $\sigma^\delta = \sqrt{2/3} \sigma_\delta$ ,  $\sigma_\delta$  – предел текучести;  $\Delta s = s - s_0$ .

В теории течения, как правило, рассматриваются траектории малой кривизны  $R \gg \lambda$ , для которых по данным опытов В.С. Ленского [11, 12]  $\vartheta_1 \approx 0$ . Поэтому из (15) для больших  $R$  и малых  $\mathfrak{a}_1$  следует, что  $\vartheta_1^* \rightarrow 0$  и  $\vartheta_1 = \vartheta_1^0 e^{-k\Delta s}$ . В этом случае для функционала  $P = d\sigma/ds$  достаточно использовать только один опыт на растяжение. Применение соотношений (12), учитывающих параметр  $\mathfrak{a}_1$  сложности процесса деформирования и его векторные свойства, позволяет исследовать процессы средней кривизны, близкие к траекториям малой кривизны.

В работе [8] предложена несколько измененная формулировка свойства запаздывания, которая названа *принципом запаздывания* векторных свойств материала: «Ориентация вектора напряжений  $\bar{\sigma}$  в естественном репере  $\hat{p}_k$  (Френе) зависит от внутренней геометрии только ограничительного отрезка траектории деформации, предшествующего рассматриваемой точке траектории. Длина этого отрезка  $\lambda$  называется *следом запаздывания* (памяти)», отражающим фундаментальное свойство твердых тел. Сформулированы следствия: если начиная с точки  $K$  траектория деформации становится прямолинейной, то на расстоянии  $\lambda$  от данной точки вектор напряжений  $\bar{\sigma}$  направлен по этой прямой (в пределах точности  $(6-7^\circ)$  теории простых процессов); на траектории малой кривизны вектор напряжений  $\bar{\sigma}$  направлен по касательной к траектории деформаций  $\vec{Y}(s)$ . Траекторией малой кривизны называется такая, для которой  $(\lambda \mathfrak{a}_1)^2 \ll 1$ , где  $\mathfrak{a}_1$  – главная кривизна. При этом ничего не говорится об аналитичности или неаналитичности траектории в целом. Отмечается также, что след запаздывания  $\lambda$  у различных материалов при нормальной температуре изменяется от значений  $(3 \div 5)$  до  $(11 \div 15)$  пределов упругих деформаций при растяжении. Далее утверждается, что в пределах малых деформаций (3–4 %) это изменение незначительно и величину  $\lambda$  можно считать приближенно *константой материала*, а не процесса. Однако экспериментальные исследования на участках, предшествующих участку следа запаздывания, практически не проводились, и гипотеза В.С. Ленского не подтвердилась.

В работах [12, 13] отмечается, что след запаздывания характеризует «память» материала по отношению к векторным свойствам, и делается попытка обобщить принцип запаздывания на скалярные свойства материала. В опытах по двухзвенным ломаным траекториям с углами излома  $90^\circ$  было замечено, что на диаграммах прослеживания процессов  $\sigma = \sigma(s)$  при активном деформировании образуются «нырки» с временным понижением напряжений на 7–8 % для сталей 38ХА и 30ХГСА. После излома траекторий кривые  $\sigma = \sigma(s)$  асимптотически и очень быстро стремились выйти на универсальную зависимость простого нагружения  $\sigma = \hat{O}(\dot{Y})$  Роша и Эйхингера. При этом для углов излома порядка  $45^\circ$  это понижение почти

отсутствовало и диаграмму  $\sigma = \hat{O}(s)$  можно было считать универсальной. Этот вывод В.С. Ленского одно время доминировал в развитии теории процессов как непреодолимое препятствие, хотя опытов в диапазоне углов излома  $\vartheta_1^0 > 90^\circ$  для пассивных процессов практически не ставилось.

Согласно сформулированному в [12] В.С. Ленским принципу запаздывания скалярных, «скалярные свойства материала зависят не от всей предшествующей истории пластического деформирования, а лишь от внутренней геометрии некоторого конечного участка траектории деформации  $\lambda_{ск}$ , предшествующего рассматриваемому моменту. Величина  $\lambda_{ск}$  называется *следом запаздывания скалярных свойств* материала». Расстояние по длине дуги  $s$  на диаграмме до точки, в которой диаграмма прослеживания процесса  $\sigma = \sigma(s)$  выходила снова на диаграмму простого нагружения, принималось за след запаздывания. При этом оказалось, что след запаздывания векторных свойств  $\lambda$  был в 2–3 раза больше следа запаздывания скалярных свойств.

В работах И.М. Коровина [14, 15], Дао-Зуй-Бика [16], Р.А. Васина [17] были описаны опыты на сложное нагружение при растяжении с кручением стали 38ХА, выполненные в динамической лаборатории НИИ Механики МГУ на машине СН под руководством В.С. Ленского в период с 1961 по 1965 гг. В этих опытах при различных длинах дуг  $s_0$  до излома двузвенных ломаных допускались углы в диапазоне  $0 < \vartheta_1^0 \leq 90^\circ$ , то есть исследовались только активные процессы упруго-пластического деформирования. И.М. Коровиным было установлено, что после излома траекторий и исчерпания следа запаздывания  $\lambda$  зависимость  $\sigma = \sigma(s)$  располагается приблизительно параллельно универсальной кривой  $\sigma = \hat{O}(\dot{\gamma})$  простого нагружения. Для оценки следа запаздывания вводился допуск на угол сближения  $\vartheta_1^0 < 0,1$ , то есть примерно  $6^\circ$ . Отмечено, что при углах излома порядка  $45^\circ$  «нырков» напряжений не наблюдалось.

В 1979–1980 гг. по программам А.А. Ильюшина и В.С. Ленского на автоматизированной испытательной машине на сложное нагружение IS-10TS в Японии группой ученых были проведены экспериментальные исследования по проверке достоверности теории процессов А.А. Ильюшина [18]. Испытания проводились на образцах из малоуглеродистой стали S15C по двузвенным плоским траекториям, в которых первое звено было криволинейным, длиной 2,5 %, и состояло из двух дуг окружностей постоянной кривизны с радиусами 1 и 0,4 %, а второе звено было прямолинейным. Углы излома составляли  $0^\circ; \pm 45^\circ; \pm 90^\circ; \pm 135^\circ$ . Зависимости  $\sigma = \sigma(s)$  после излома были различными для разных траекторий и определялись историей предварительного нагружения и деформирования на первом участке. Однако все они стремились занять с ростом длины дуги  $s$  положение, близкое к диаграмме  $\sigma = \hat{O}(s)$ .

При исследовании векторных свойств материала на диаграмме  $\vartheta_1 - \Delta s$  явление запаздывания обнаруживалось весьма четко. При смещении кривых  $\vartheta_1 - \Delta s$  до совпадения значений в точке излома  $K$  наблюдалось соответствие результатов экспериментов. На этом основании в [18] делается вывод о том, что зависимость  $\vartheta_1 - \Delta s$  при деформировании по прямолинейному участку после излома можно отобразить единой кривой независимо от начального значения угла излома и предшествующей ему истории деформирования. Данное предположение основано на гипотезе локальной определенности [19]. Тем не менее эти результаты нуждаются в дополнительной экспериментальной проверке. Согласно другой гипотезе [19] убывание угла  $\vartheta_1$  с ростом  $\Delta s$  после излома не зависит от предшествующей истории деформирования, что также нуждается в экспериментальной проверке на более сложных

криволинейных траекториях первого участка, в том числе учитывающих их возможную неаналитичность.

В исследовании В.А. Пелешко [20] результаты опытов работы [19] были использованы для проверки достоверности предложенных материальных функций гипотезы компланарности А.А. Ильюшина. Для малоуглеродистой стали S15C и латуни в [20] были обработаны опыты по программам смещенного веера ломаных траекторий с углами излома  $\vartheta_1^0 = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$  при предварительной деформации от  $s_0 = 2\%$  до  $s_0 = 5\%$  на первом участке. Эти опыты показали, что при углах  $\vartheta_1^0 < 60^\circ$  сложное нагружение на зависимость  $\sigma-s$  сказывается слабо, а при  $\vartheta_1^0 > 60^\circ$  на диаграмме образуются нырки напряжений, на которых уменьшение напряжений различно и может быть существенным. Зависимость  $\sigma-\Delta s$  стремится занять положение ниже диаграммы деформирования при простом растяжении. След запаздывания по скалярным и векторным свойствам не определялся.

В работе О.А. Шишмарева и А.Г. Щербо [21] исследовалось свойство запаздывания векторных и скалярных свойств нержавеющей стали с углами излома  $\vartheta_1^0 = 0^\circ, 90^\circ, 110^\circ, 125^\circ, 145^\circ, 160^\circ, 180^\circ$ . След запаздывания векторных свойств считался исчерпанным при достижении углом сближения  $\vartheta_1^* = 5^\circ$ . После «нырка» напряжений диаграмма  $\sigma = \sigma(s)$  занимала положение ниже универсальной кривой простого нагружения  $\sigma = \hat{O}(\dot{Y})$  и не имела тенденции к сближению с ней, как в исследованиях [14, 15, 18, 20].

Векторные свойства запаздывания также изучались в работах [22, 23]. Подробные исследования свойств запаздывания материалов приведены в [9, 10].

Экспериментальное исследование проводилось на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. Трубчатые образцы из стали 45 испытывались по двухзвенной и трехзвенной траекториям в пространстве деформаций, представленным на рис. 1.

На первом звене образцы подвергались кручению до точки  $\hat{E}_1$ , где компоненты вектора деформаций  $\dot{Y}_1 = 0, \dot{Y}_3 = 2\%$ . Затем производился излом траекторий на  $90^\circ$ . На втором звене ломаной траектории (рис. 1а) первой программы реализовывалось свойство запаздывания векторных свойств материала. На втором звене трехзвенной траектории (рис. 1б) была дополнительно реализована полная окружность радиуса  $R = \dot{Y} = 2\%$  с выходом в точку  $\hat{E}_0$ , в которой траектория плавно переходила на третье звено в виде той же прямой, что и в первом опыте. В точке  $\hat{E}_0$  происходило скачкообразное изменение кривизны общей траектории от значения  $\kappa_1 = 50$  до 0. Это изменение дало эффект, аналогичный наличию угла излома  $\vartheta_1^0$  на траектории деформирования в первом опыте. Следовательно, угол излома  $\vartheta_1^0$  и кривизна  $\kappa_1$  в точке  $\hat{E}_0$  являются параметрами, характеризующими процесс сложного деформирования и его неаналитичность.

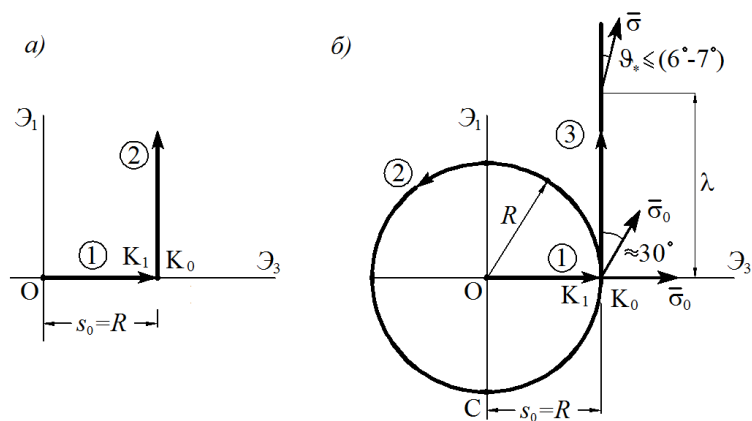


Рис. 1. Траектории деформирования:  
двухзвенная (а); трехзвенная (б)

На рис. 2 представлены кривые изменения угла излома  $\vartheta_1$  от приращения  $\Delta s = s - s_0$  длины дуги траектории  $s$ , где  $s_0$  – ее значение в точке излома  $\hat{E}_0$  в каждом из опытов.

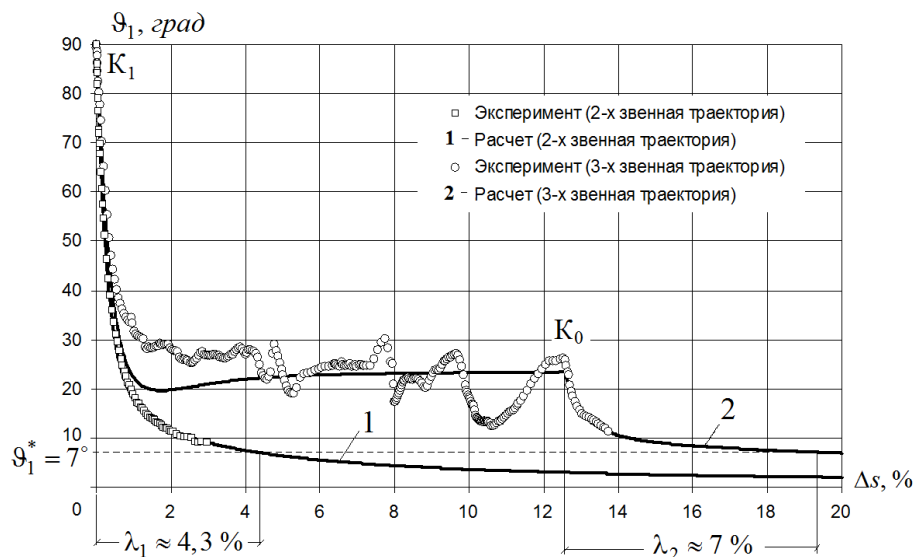


Рис. 2. Диаграмма  $\vartheta_1 - \Delta s$

Кривая 1 отвечает испытанию образца по двухзвенной ломаной, а кривая 2 – испытанию по трехзвенной траектории с дополнительным деформированием по окружности перед гладким выходом на прямолинейный участок [24]. В первом опыте длина следа запаздывания с допуском на отклонение  $7^\circ$  оказалась равна  $4,3\%$ , а во втором составила  $7\%$ , то есть в  $1,63$  раза больше, при этом радиус окружности  $R = 2\%$  был меньше  $\lambda$ . Следовательно, траектория постоянной кривизны по современной классификации не относится к траектории малой кривизны и в точке  $\hat{E}_0$  не является аналитической.

Согласно общему принципу запаздывания ориентация вектора напряжений относительно направления касательной к траектории зависит не от всей длины траектории, а только от ее последнего участка, называемого следом запаздывания  $\lambda$ . При анализе результатов опытов естественно возникает вопрос о том, можно ли до точки  $\hat{E}_0$  начала последнего участка заменить траекторию иным участком?

Как показал опыт, след запаздывания существенно изменяется, и, следовательно, ориентация вектора  $\vec{b}$  в точках не оставалась постоянной.

В формулировке принципа запаздывания ничего не сказано о том, справедлив ли он для неаналитических траекторий, к которым относятся результаты данных опытов.

### Библиографический список

1. Хоэнземер, К. К механике пластического поведения стали / К. Хоэнземер, В. Прагер // Теория пластичности: сборник статей. М.: ГИИЛ, 1948. С. 257–282.
2. Ильюшин, А.А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошной среды / А.А. Ильюшин // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18. № 6. С. 641–666.
3. Ильюшин, А.А. Об основах общей математической теории пластичности / А.А. Ильюшин // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 4–29.
4. Ильюшин, А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
5. Ильюшин, А.А. Вопросы общей теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 399–411.
6. Ильюшин, А.А. Труды (1946–1966). Т.2. Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
7. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. М.: МГУ, 1990. 310 с.
8. Ильюшин, А.А. О соотношениях и методах современной теории пластичности / А.А. Ильюшин, В.С. Ленский // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 240–255.
9. Зубчанинов, В.Г. Механика процессов пластических сред / В.Г. Зубчанинов. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
10. Зубчанинов, В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность / В.Г. Зубчанинов. М.: Физматлит, 2008. 336 с.
11. Зубчанинов, В.Г. О соотношениях между напряжениями и деформациями в теории пластичности при сложном нагружении / В.Г. Зубчанинов // Проблемы прочности и пластичности: межвузовский сборник Нижегородского ун-та. 2011. № 73. С. 240–255.
12. Ленский, В.С. Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций / В.С. Ленский // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58–82.
13. Ленский, В.С. Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном нагружении / В.С. Ленский // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 11. С. 15–24.
14. Коровин, И.М. Некоторые вопросы пластичности материала при нагружении с точкой излома / И.М. Коровин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 3. С. 152–158.
15. Коровин, И.М. Экспериментальное определение зависимости напряжение-деформация при сложном нагружении по траектории с одной точкой излома / И.М. Коровин // Инж. журнал АН СССР. 1964. Т. 4. № 3. С. 592–600.
16. Дао Зуй Бик. О гипотезе локальной определенности в теории пластичности / Дао Зуй Бик // Вестник МГУ. Математики и механика. 1965. № 2. С. 67–75.
17. Васин, Р.А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении / Р.А. Васин // Упругость и неупругость. М.: МГУ, 1971. № 1. С. 59–126.
18. Охаши, И. Некоторые экспериментальные данные об общем законе пластичности Ильюшина / И. Охаши [и др.] // Изв. АН СССР. МДТТ. 1981. № 6. С. 53–64.



19. Ленский, В.С. Гипотеза локальной определенности в теории пластичности / В.С. Ленский // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 5. С. 154–158.
20. Пелешко, В.А. Изоморфизм трехчленных соотношений теории пластичности и условия разрешимости краевых задач / В.А. Пелешко // Вестник МГУ. Математика и механика. 1987. № 4. С. 93–96.
21. Шишмарев, О.А. Образ процесса нагружения для двухзвенных ломаных траекторий деформации с углом излома более  $90^\circ$  / О.А. Шишмарев, А.Г. Щербо // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 185–189.
22. Зубчанинов, В.Г. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования сталей 40, 40Х при сложном нагружении по плоским траекториям / В.Г. Зубчанинов, Д.Е. Иванов, А.В. Акимов // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы 3-го Международного научного симпозиума. Тверь: Изд-во ТвПИ, 1993. Ч. 3. С. 44–93.
23. Акимов, А.В. Экспериментальное исследование пластических свойств стали 45 на многозвенных пространственных траекториях деформаций / А.В. Акимов [и др.] // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела: материалы 3-го Международного научного симпозиума. Тверь: Изд-во ТвПИ, 1993. Ч. 3. С. 164–185.
24. Зубчанинов, В.Г. Моделирование процессов сложного упругопластического деформирования материалов / В.Г. Зубчанинов, Е.Г. Алексеева // Вестник Чувашского государственного педагогического ун-та. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). Т. 1. С. 172–181.